17th International Conference on the Applications of Computer
Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering
K. Gürlebeck and C. Könke (eds.)
Weimar, Germany, 12–14 July 2006

ZUR SYNCHRONISATION VON LINIEN IM ÖPNV

W. Dzwigon*, L. Hempel

** Cracow University of Technology*
ul. Warszawska 24, 31-866 Krakow, Poland
E-mail: wiesiek@transys.wil.pk.edu.pl

Keywords: public transport, time table, integer solutions of algebraic equations

Abstract. *Wir betrachten im ÖPNV (Öffentlichen Personennahverkehr) diejenige Situation, daß zwei Bus- oder Straßenbahnlinien gemeinsame Haltestellen haben. Ziel unserer Untersuchungen ist es, für beide Linien einen solchen Fahrplan zu finden, der für die Fahrgäste möglichst viel Bequemlichkeit bietet. Die Bedarfsstruktur - die Anzahl von Personen, die die beiden Linien benutzen - setzt dabei gewisse Beschränkungen für die Taktzeiten der beiden Linien. Die verbleibenden Entscheidungsfreiheiten sollen im Sinne der Zielstellung ausgenutzt werden.*
Im Vortrag wird folgenden Fragen nachgegangen:
- *nach welchen Kriterien kann man die „Bequemlichkeit“ oder die „Synchonisationsgüte“ messen?*
- *wie kann man die einzelnen „Synchronisationsmaße“ berechnen ?*
- *wie kann man die verbleibenden Entscheidungsfreiheiten nutzen, um eine möglichst gute Synchronisation zu erreichen ?*

Die Ergebnisse werden dann auf einige Beispiele angewandt und mit den bereitgestellten Methoden Lösungsvorschläge unterbreitet.

1. EINLEITUNG

Viele Parameter der ÖPNV-Linien haben Einfluß auf die Qualität, mit der den Bedürfnissen der Fahrgäste entsprochen wird. Die Analyse kann verschiedene Aspekte dieser Qualität betreffen, z. B. die Gestaltung von ÖPNV-Linien [1], die Einführung von Fahrplänen, die leicht zu merken sind [2], und anderen Aspekten ([3], [4]). In diesem Paper wird die Synchronisation von Linien betrachtet. Das ist eine solche Gestaltung der Fahrpläne für zwei Bus- oder Straßenbahnlinien, bei der die Wartezeiten an den Haltestellen minimiert und die Umsteigebedingungen verbessert werden. Diese Fragestellung ist z. B. interessant, wenn zwei ÖPNV-Linien eine gemeinsame Teilstrecke haben und die Fahrgäste können beide Linien zwischen dem Anfang und dem Ziel ihrer Fahrt verwenden, oder bei zwei sich kreuzenden Linien und an der gemeinsamen Haltestelle ein Umsteigen erfolgt. In beiden Situationen werden die Wartezeit und die für das Umsteigen verfügbare Zeit wesentliche Größen sein, die für die Bewertung der Qualität der Fahrpläne herangezogen werden. Die Bestimmung möglichst günstiger Werte für diese und eventuell andere Größen wollen wir als Synchronisation bezeichnen. Wir schlagen einige Synchronisationsmaße vor und geben einfache Methoden für ihre Berechnung an. An einigen Beispielen werden die vorgeschlagenen Maßzahlen demonstriert.

2. PROBLEMBESCHREIBUNG

Wir betrachten ein ÖPNV-Verkehrsnetz mit n Linien. Auf jeder Linie gelte ein Fahrplan, der sich im Stundentakt wiederholt. Es seien t_{ij}^k die Abfahrtszeiten der i-ten Linie an der k-ten Haltestelle, $i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,J_i; k \in S_i$. Dabei ist S_i die Menge aller Haltestellen der Linie i. Ist h_i die Taktzeit der i-ten Linie in Minuten, so ist h_i ein Teiler von 60, da sich die Fahrpläne im Stundentakt wiederholen sollen und

$$t_{ij}^k = a_i^k + jh_i; j = 0,1,2,...,J_i; i = 1,2,...,n; k \in S_i \tag{1}$$

$$\text{wobei } 0 \le a_i^k < h_i \text{ und } J_i = \left\lfloor \frac{60 - a_i^k}{h_i} \right\rfloor.$$

Dabei bedeutet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner als x, also die Abrundung von x. Synchronisation von Linien soll bewirken, daß zwei oder mehr Linien, die eine gemeinsame Strecke befahren, auf dieser gemeinsamen Strecke möglichst viele verschiedene Abfahrtszeiten haben und diese Abfahrtszeiten möglichst gleichmäßig über eine Stunde verteilt sind. Wir wollen versuchen, diese Kriterien etwas genauer zu fassen. Zunächst für den Fall n=2 zweier Linien. k sei ein Haltestelle, die beide Linien anfahren, $k \in S_1 \cap S_2$. O.B.d.A. sei $h_1 \ge h_2$ und

$$a_1^k = 0; \quad a_2^k = a \text{ und } 0 < a < h_2 \tag{2}$$

Ordnet man nun die Abfahrtszeiten der ersten und der zweiten Linie an der Haltestelle k der Größe nach, so erhält man die Folge der stündlichen Abfahrtszeiten an der Haltestelle k zu $T_1, T_2, ..., T_{J_1+J_2+2}$, wobei wegen (2) $T_1 = 0$ gilt $T_{J_1+J_2+2} = 60$ (h_i ist ein Teiler von 60).

Mit $d_1, d_2, ..., d_t$ wollen wir die Folge der Abstände der Abfahrtszeiten an der k-ten Haltestelle bezeichnen. Offensichtlich ist $t = J_1 + J_2 + 1$ und $d_j = T_{j+1} - T_j$ für j=1,2,...,t.

Als Maße für eine Synchronisation zweier Linien kann man die folgenden in Betracht ziehen:

- den Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Abstand zweier aufeinanderfolgender Abfahrten

$$\mathrm{SM}_1 := \max_{j=1,2,...,t} \mathrm{d}_j - \min_{j=1,2,...,t} \mathrm{d}_j \rightarrow \min \tag{3}$$

- die Anzahl unterschiedlicher Abstände der Abfahrten

$$SM_2 := Anz\{d_j : j = 1,...,t\} \rightarrow \min \tag{4}$$

- den mittleren Abstand der Abfahrtszeiten

$$SM_3 := m := \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{t} d_j \rightarrow \min \tag{5}$$

- die Standardabweichung der Abstände

$$SM_4 := \sqrt{Var(d_j)} := \sqrt{\frac{1}{t-1} \sum_{j=1,...,t}^{t} (d_j - m)^2} \rightarrow \min \tag{6}$$

- den Anteil des größten Abstandes an allen Abständen der Folge $(d_1, d_2, ..., d_t)$ in Prozent

$$SM_5 := \frac{Anz(d_j : j = 1,2,...,t; d_j = d^*, d^* = \max_{j=1,...,t} d_j)}{t} \cdot 100 \rightarrow \min \tag{7}$$

- den Anteil der „verlorenen Abfahrten“, (weil sie keinerlei Umsteigen erlauben) an allen Abfahrten der Folge $(d_1, d_2, ..., d_t)$ in Prozent

$$SM_6 := \frac{Anz(d_j : j = 1,2,...,t; d_j = 0)}{t} \cdot 100 \rightarrow \min \tag{8}$$

- den Anteil der Abfahrten, die für das Umsteigen zu wenig Zeit lassen, an allen Abfahrten in Prozent. Dabei ist u ein vorgegebener Parameter, der die für das Umsteigen benötigte Mindestzeit angibt

$$\mathrm{SM}_7 = \frac{\mathrm{Anz}(\mathrm{d}_j : \mathrm{d}_j < \mathrm{u}, \mathrm{j} = 1,...,\mathrm{t})}{\mathrm{t}} \times 100 \rightarrow \min \tag{9}$$

Drei Beispiele:

Bsp. 1: $h_1 = h_2 = 10$, $a = 5$, u = 3

t_{1j}^k : 0, 10, 20, 30, 40, 50,60

t_{2j}^k : 5, 15, 25, 35, 45, 55

T_p : 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60

d_j : 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5 und $t = 12$.

Damit ergibt sich für $\max_{j=1,2,\ldots,t} d_j = 5 = \min_{j=1,2,\ldots,t} d_j$ und $SM_1 = 0$, $SM_2 = 1$, $SM_3 = m = 5$, $SM_4 = 0$, $SM_5 = 100\%$, $SM_6 = 0\%$ und $\mathrm{SM}_7 = 0\%$.

Eine solche Synchronisation zweier Linien würde man als sehr gut ansehen. Vier der Synchronisationskriterien nehmen ihren minimalen Wert an, die andere ihren bestmöglichen.

Bsp. 2: $h_1 = 10$, $h_2 = 6$, $a = 5$, u = 3

t_{1j}^k : 0, 10, 20, 30, 40, 50,60

t_{2j}^k : 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59

T_p : 0, 5, 10, 11, 17, 20, 23, 29, 30, 35, 40, 41, 47, 50, 53, 59, 60

d_j : 5, 5, 1, 6, 3, 3, 6, 1, 5, 5, 1, 6, 3, 3, 6, 1 und $t = 16$.

Damit ergibt sich für $\max_{j=1,2,\ldots,t} d_j = 6$, $\min_{j=1,2,\ldots,t} d_j = 1$ und $SM_1 = 5$, $SM_2 = 4$, $SM_3 = m = 3{,}75$, $SM_4 = 1{,}983$, $SM_5 = 25\%$, $SM_6 = 0\%$ und $\mathrm{SM}_7 = 25\%$.

Diese Synchronisation beider Linien würde deutlich schlechter als die des Bsp.1 angesehen werden, was auch in allen Synchronisationkriterien zum Ausdruck kommt.

Bsp. 3: $h_1 = 6$, $h_2 = 5$, $a = 3$, u = 3

t_{1j}^k : 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60

t_{2j}^k : 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58

T_p : 0, 3, 6, 8, 12, 13, 18, 18, 23, 24, 28, 30, 33, 36, 38, 42, 43, 48, 48, 53, 54, 58, 60

d_j : 3, 3, 2, 4, 1, 5, 0, 5, 1, 4, 2, 3, 3, 2, 4, 1, 5, 0, 5, 1, 4, 2 und $t = 22$.

Damit ergibt sich für $\max_{j=1,2,\ldots,t} d_j = 5$, $\min_{j=1,2,\ldots,t} d_j = 0$ und $SM_1 = 5$, $SM_2 = 6$, $SM_3 = m = 2{,}727$, $SM_4 = 1{,}743$, $SM_5 = 18{,}18\%$, $SM_6 = 9{,}09\%$ und $\mathrm{SM}_7 = 45{,}45\%$

Dies Synchronisation beider Linien würde man als sehr schlecht ansehen. Die ersten beiden Kriterien haben maximale Werte, die anderen einen Wert im mittleren Bereich der für ihn möglichen Werteskala.

3. DIE BERECHNUNG DER SYNCHRONISATIONSMASSE

Sind h_1, h_2 und a gegeben, so kann eine Größe d nur dann als Abstand zweier Abfahrtszeiten t_{1i} und t_{2j} auftreten, wenn d in der Gestalt

$$d = t_{1i} - t_{2j} = ih_1 - jh_2 - a \tag{10}$$

oder $$d = t_{2j} - t_{1i} = jh_2 + a - ih_1 \tag{11}$$

oder $$d = t_{2j+1} - t_{2j} = (j+1)h_2 + a - jh_2 - a = h_2 \tag{12}$$

darstellbar ist. Die Darstellung $d = t_{1i+1} - t_{1i} = h_1$ kann wegen der Voraussetzungen $h_1 \geq h_2$ und $0 \leq a \leq h_2$ nur auftreten, wenn $h_1 = h_2$ und entweder $a = 0$ oder $a = h_2$ ist. In diesem Fall würden beide Linien immer zur gleichen Zeit abfahren. Diesen trivialen Fall wollen wir im Folgenden nicht weiter betrachten.

Damit muß ein auftretender Abstand $d \neq h_2$ in der Form $d = ih_1 - jh_2 - a$ oder $d = jh_2 + a - ih_1$ oder, was dasselbe ist $-d = ih_1 - jh_2 - a$ darstellbar sein, d.h. es muß ganze Zahlen i und j geben, für die die Gleichung

$$ih_1 - jh_2 = a + d \quad \text{bzw.} \quad ih_1 - jh_2 = a - d \tag{13}$$

erfüllt ist.

Aus der elementaren Zahlentheorie sind die folgenden Zusammenhänge bekannt:

Satz 1: (a) Die Gleichung

$$\alpha x + \beta y = \gamma \tag{14}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten α und β und einer ganzzahligen rechten Seite γ hat dann und nur dann ganzzahlige Lösungen (x,y), wenn der größte gemeinsame Teiler ggT(α,β) von α und β ein Teiler der rechten Seite γ ist.

(b) Hat die Gleichung (14) eine Lösung (x_0, y_0) und ist $ggT(\alpha, \beta) = \delta$, so erhält man alle (unendlich vielen) Lösungen von (14) in der Gestalt

$$\begin{cases} x = x_0 + k\dfrac{\beta}{\delta} \\ y = y_0 - k\dfrac{\alpha}{\delta} \end{cases} \tag{15}$$

wobei k jede beliebige ganze Zahl sein kann.

(c) Ist $\gamma = \eta\delta = \eta \cdot ggT(\alpha, \beta)$, so erhält man eine Lösung (x_0, y_0), indem man die Darstellung von δ durch α und β

$$\delta = u \cdot \alpha + v \cdot \beta \tag{16}$$

in der u und v ganze Zahlen sind, mit η multipliziert, d. h. es ist

$$\begin{cases} x_0 = \eta \cdot u \\ y_0 = \eta \cdot v \end{cases} \tag{17}$$

Bemerkung 1: Die Bestimmung von $\delta = ggT(\alpha, \beta)$ und der Darstellung $\delta = u \cdot \alpha + v \cdot \beta$ nimmt man bequemer weise mit dem altbekanntem Euklidischen Algorithmus vor.

Satz 2: Sind a und b Teiler der natürlichen Zahl n, $g = ggT(a,b)$ und $a = g \cdot a'$, $b = g \cdot b'$, so ist $g \cdot a' \cdot b'$ ein Teiler von n und insbesondere $g \cdot a' \cdot b' \leq n$.

Folgerung 1: Wenn man Satz 1 auf unsere Gleichung (13) anwendet, ergibt sich, dass ein Abstand d zwischen zwei Abfahrten nur dann auftreten kann, wenn a+d bzw. a-d ein Vielfaches von $ggT(h_1, h_2)$ ist. Außerdem gibt es dann durch die Beschränkungen für i und j, $0 \leq i \leq J_1, 0 \leq j \leq J_2$ nur endlich viele Lösungen.

Für unser Beispiel Bsp.2 bedeutet das: $h_1 = 10, h_2 = 6, a = 5$ und die Gleichung (13) heißt $10i - 6j = 5 \pm d$, d.h. $\alpha = 10, \beta = -6, \gamma = 5 \pm d$. Da $ggT(10,-6) = 2$ ist, hat diese Gleichung nur dann ganzzahlige Lösungen, wenn $5 \pm d$ durch 2 teilbar sind, das heißt aber d muß ungerade sein. In diesem Beispiel treten auch nur die Abstände 1, 3, 5 auf und als Lösung von (12) auch noch $6 = h_2$. Wegen $ggT(10,-6) = 2 = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 10$ ergibt sich z. B. für d=3

$$a + d = 8 = 4 \cdot 2 = 4 \cdot (2 \cdot 6 - 1 \cdot 10) = 8 \cdot 6 - 4 \cdot 10$$

und damit die Lösung $(x_0, y_0) = (-4,-8)$. Nach (15) erhält man diejenigen Lösungen, die auch die Beschränkungen erfüllen für k= -2 und k= -3 zu

$$\begin{aligned}(i_1, j_1) &= (2,2) \\ (i_2, j_2) &= (5,7)\end{aligned}.$$

D.h. der Abstand 3 tritt zwischen den Abfahrtszeiten $t_{12} = 2 \cdot h_1 = 20$ und $t_{22} = 5 + 2 \cdot h_2 = 17$ und zwischen den Abfahrtszeiten $t_{15} = 5 \cdot h_1 = 50$ und $t_{27} = 5 + 7 \cdot h_2 = 47$ auf. Wenn wir in (13) die rechte Seite a-d = 5-3 = 2 benutzen, erhalten wir in analoger Weise die weiteren Lösungen

$$\begin{aligned}(i_3, j_3) &= (2,3) \\ (i_4, j_4) &= (5,8)\end{aligned}.$$

Weiterhin lassen sich folgenden Aussagen beweisen bzw. aus dem Bisherigen schlussfolgern:

Folgerung 2: Ist $\mathrm{g} = \mathrm{ggT}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2)$, so tritt ein Abstand d mit $0 \le d < h_2$ nur dann auf, wenn

$$d = \pm a + kg \tag{18}$$

wobei k eine ganze Zahl ist.

Folgerung 3: Ist a durch g teilbar, so gibt es den Abstand 0 und damit verlorene Abfahrten und diese verlorenen Abfahrten treten auch nur dann auf. Sind h_1 und h_2 teilerfremd, d. h. $ggT(h_1, h_2) = 1$, so treten immer verlorene Abfahrten auf. Tritt der Abstand 0 auf, ist er gleichzeitig auch der kleinstmögliche Abstand.

Folgerung 4: Ist a nicht durch g teilbar so gibt es ganze Zahlen p und q, für die

$$a = p \cdot g + r \quad \text{mit} \quad 0 < r < g \tag{19}$$

$$\text{und} \quad -a = q \cdot g + s \quad \text{mit} \quad 0 < s < g \tag{20}$$

Der kleinste auftretende Abstand ist dann gegeben durch $d_{\min} = \min(r,s)$ und es gilt $d_{\min} < g$.

Folgerung 5: Ist $h_1 = h_2 = h$, so treten nur die Abstände a und $h - a$ auf. Ist außerdem h gerade und $a = h/2$, so ist $a = h - a$ und es gibt nur einen Abstand, nämlich $h/2$. Ist $a = 0$, so sind die Abstände 0 oder h.

Lemma 1: Ist d ein möglicher Abstand, d. h. es ist $d = \pm a + k \cdot g$, so gibt es zu diesem d eine zulässige Lösung sowohl der Gleichung $ih_1 - jh_2 = a + d$ als auch der Gleichung

$ih_1 - jh_2 = a - d$, d. h. es gibt Lösungen dieser Gleichungen, die auch die Beschränkungen $0 \le i \le J_1$ und $0 \le j \le J_2$ erfüllen.

Lemma 2: Ist $h_2 < h_1$, so gibt es für jedes a mit $0 \le a < h_2$ ein i und j , für die gilt

$$ih_1 \le jh_2 + a < (j+1)h_2 + a \le (i+1)h_1 \qquad (21)$$

Damit tritt dann der Abstand h_2 auf und ist auch der größtmögliche.

Folgerung 6: Ist d in möglicher Abstand und gibt es eine ganze Zahl k mit $k \ge 1$ und $d + kh_2 \le h_1$**, s**o tritt der Maximalabstand h_2 in der Folge der Abstände unmittelbar hinter jedem d, das einer Lösung der Gleichung $ih_1 - jh_2 = a - d$ entspricht genau k mal auf.

Lemma 3: Ist x eine der Abfahrtszeiten einer der beiden Linien, so ist auch $x + gh_1^{'}h_2^{'}$ eine Abfahrtszeit derselben Linie und $gh_1^{'}h_2^{'}$ ist die kleinste Zahl, für die das für alle Abfahrtszeiten x gilt. Dabei sind $h_1^{'}$ und $h_2^{'}$ gegeben durch $h_1 = g \cdot h_1^{'}$ und $h_2 = g \cdot h_2^{'}$.

Folgerung 7: Auch die Abstände zwischen den Abfahrtszeiten wiederholen sich mit der Periode $gh_1^{'}h_2^{'}$, d.h. jeder Abstand d, der einer Lösung der Gleichung $ih_1 - jh_2 = a - d$ entspricht, wiederholt sich mit dieser Periode, also $60 / g \cdot h_1^{'} \cdot h_2^{'}$ mal in einer Stunde. Das sind gerade die Abstände, für die $d \equiv a \bmod g$ gilt. Und jeder Abstand d, der einer Lösung der Gleichung $ih_1 - jh_2 = a + d$ entspricht, wiederholt sich auch $60 / g \cdot h_1^{'} \cdot h_2^{'}$ mal. Das sind gerade die Abstände d, für die $d \equiv -a \bmod g$ gilt. Falls $a \equiv -a \bmod g$, gibt es zu jeden Abstand d sowohl eine Lösung der Gleichung $ih_1 - jh_2 = a + d$ als auch eine Lösung der Gleichung $ih_1 - jh_2 = a - d$, mithin tritt der Abstand d `genau $2 \cdot 60 / g \cdot h_1^{'} \cdot h_2^{'}$ mal auf. Der Abstand 0 kommt nur halb so oft vor, also $60 / gh_1^{'}h_2^{'}$ mal. Wegen Satz 2 ist $gh_1^{'}h_2^{'}$ ein Teiler von 60 und damit $60 / gh_1^{'}h_2^{'}$ ganzzahlig.

Mit diesen Aussagen lassen sich nun die 7 Synchronisationsmaße wie folgt berechnen:

Sind h_1, h_2 und a bekannt, so ermittelt man der Reihe nach

$$g = ggT(h_1, h_2) \qquad (22)$$

$$h_1^{'} = h_1 / g \qquad (23)$$

$$h_2^{'} = h_2 / g \qquad (24)$$

$$w = 60 / g \cdot h_1^{'} \cdot h_2^{'} \qquad (25)$$

$$\overline{w} = \begin{cases} 2 \cdot w & falls \quad a \equiv -a \bmod g \\ w & sonst \end{cases} \qquad (26)$$

$$t = \frac{60}{h_1} + \frac{60}{h_2} \tag{27}$$

$$r = a - p \cdot g \quad \text{mit} \quad 0 \le r < g \tag{28}$$

$$s = -a + q \cdot g \quad \text{mit} \quad 0 \le s < g \tag{29}$$

sodann die $h_2^{'}$ Abstände

$$d_{rk} = r + k \cdot g \quad \text{für} \quad \mathrm{k} = 0,1,2...,\ h_2^{'}\text{-}1 \tag{30}$$

und die $h_2^{'}$ Abstände

$$d_{sl} = s + l \cdot \mathrm{g} \quad \text{für} \quad l = 0,1,2,...,h_2^{'} - 1 \tag{31}$$

Falls $r = s$, ist $a \equiv -a \bmod g$ und es stimmen die d_{rk} und die d_{sl} überein.
Die Menge aller auftretenden Abstände sei mit D bezeichnet

$$D = \begin{cases} \{a, h-a\} & \textit{für} \quad h_1 = h_2 = h \\ \{d_{rk}, d_{sl} : k, l = 0,1,2,...,h_2^{'} - 1\} & \textit{für} \quad h_2 < h_1 \end{cases} \tag{32}$$

Wenn $h_2 < h_1$, kommt zu den Abständen aus D noch der Abstand h_2 dazu.
Für jedes $d \in D$, für das $d \equiv a \bmod g$ ist und $d + h_2 < h_1$ gilt, bestimme man das

$$z_d = \left\lfloor \frac{h_1 - d}{h_2} \right\rfloor \tag{33}$$

Mit $D_h \subseteq D$ sei die Menge der Abstände bezeichnet, für die nach Obigem ein (positives) z_d bestimmt werden kann. Mit

$$z_h = \begin{cases} \sum_{d \in D_h} z_d \cdot w & \textit{für} \quad h_2 < h_1 \\ 0 & \textit{für} \quad h_2 = h_1 \end{cases} \tag{34}$$

erhält man dann die Anzahl der Abstände $d = h_2$. Die Menge $\mathrm{D_u}$:= {d Î D : d < u} gibt die Abstände an, die für ein Umsteigen zu klein sind.

Dann ergeben sich die Synchronisationsmaße folgendermaßen:

$$SM_1 = \begin{cases} |2a - h| & \textit{für} \quad h_1 = h_2 = h \\ h_2 - \min(r, s) & \textit{für} \quad h_2 < h_1 \end{cases} \tag{35}$$

$$SM_2 = \begin{cases} 2 & \textit{für} \quad h_1 = h_2 = h, a \ne h/2 \\ 1 & \textit{für} \quad h_1 = h_2 = h, a = h/2 \\ 2h_2^{'} + 1 & \textit{für} \quad h_2 < h_1, r \ne s \\ h_2^{'} + 1 & \textit{für} \quad h_2 < h_1, r = s \end{cases} \tag{36}$$

$$SM_3 = m = \frac{1}{t}\left(h_2 \cdot z_h + \sum_{d \in D} d \cdot \overline{w} \right) \tag{37}$$

$$SM_4 = \sqrt{\frac{1}{t-1}\left((h_2 - m)^2 \cdot z_h + m^2 \cdot w + \sum_{\substack{d \in D \\ d \neq 0}} (d-m)^2 \cdot \overline{w} \right)} \tag{38}$$

$$SM_5 = \begin{cases} \frac{w}{t} \cdot 100 & falls \quad h_1 = h_2 = h, a \neq h/2 \\ \frac{2 \cdot w}{t} \cdot 100 & falls \quad h_1 = h_2 = h, a = h/2 \\ \frac{z_h}{t} \cdot 100 & falls \quad h_2 < h_1 \end{cases} \tag{39}$$

$$SM_6 = \begin{cases} 0 & für \quad a \neq k \cdot g \\ \frac{w}{t} \cdot 100 & für \quad a \equiv 0 \bmod g \end{cases} \tag{40}$$

$$\mathrm{SM}_7 = \frac{\mathrm{w} \times \mathrm{Anz}(\mathrm{D_u})}{\mathrm{t}} \times 100 \tag{41}$$

4. DIE BESTIMMUNG GÜNSTIGER PARAMETER

Zur Steuerung der Synchonisation hat man nur 3 Parameter zur Verfügung h_1, h_2 und a.

Von diesen sind h_1 und h_2, außer dass sie Teiler von 60 sein sollen, noch weiteren Beschränkungen unterworfen. Einmal dürfen sie nicht zu klein sein, weil dies logistische Probleme an den Haltestellen und relativ hohe Anzahl von Zügen bzw. Bussen auf einer solchen Linie bedeutet. Taktzeiten kleiner als 3 Minuten sind praktisch nicht relevant. Zum anderen müssen sich die Taktzeiten an dem Bedarf einer Linie orientieren, was praktisch bedeutet, dass für ein h_i (i = 1,2) von vorn herein nur gewisse Werte in Frage kommen. Es sei die Menge der möglichen Werte für h_i mit H_i bezeichnet. H_i ist dann eine Teilmenge der im Prinzip möglichen Taktzeiten $M := \{3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$. Dabei sind die Taktzeiten 3 und 4 gegenwärtig oft noch nicht technisch realisierbar.

Wenn $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, d. h. es gibt eine Taktzeit h, die für beide Linien möglich ist, so wähle man diese und außerdem $a = \left\lfloor \frac{h}{2} \right\rfloor$. Dann hat man nur zwei auftretende Abstände a und $h-a$. Gibt es mehrer Taktzeiten, die für beide Linien möglich sind, wähle man h gerade, falls das geht, und $a = \frac{h}{2}$, weil dadurch nur der Abstand a auftritt, und/oder h als größten Wert aus $H_1 \cap H_2$, weil dadurch die Anzahl der Maximalabstände minimal wird.

Wenn $H_1 \cap H_2 = \varnothing$, wähle man h_1 und h_2 so, dass ihr größter gemeinsamer Teiler g möglichst groß wird, und $a = \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor$. Damit wird der Minimalabstand möglichst groß und die

Anzahl der Abstände möglichst klein. Ein gerades g führt außerdem zu einer Halbierung der Anzahl der Abstände. Die folgende Tabelle zeigt diese Entscheidungsvorschläge:

Voraussetzung	h_1 , h_2	a
$H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$	$h_1 = h_2$ möglichst groß und/oder gerade	$a = \left\lfloor \frac{h}{2} \right\rfloor$
$H_1 \cap H_2 = \emptyset$	h_1 und h_2 so, dass $ggT(h_1, h_2) = g$ möglichst groß und gerade	$a = \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor$

Betrachten wir nun einige Beispiele und vergleichen die vorgeschlagenen Lösungen mit Alternativlösungen.

Bsp. 4: $H_1 = \{6,10,12\}$, $H_2 = \{4,5,6\}$, u = 3

h_1	h_2	a	g	D	d_{max}	D_h	t	w	$\overline{w}$	z_h	SM_1	SM_2	SM_3	SM_4	SM_5	SM_6	SM_7
6	6	3	6	3	3	$\emptyset$	20	10	20	0	0	1	3	0	100	0	0
10	6	3	2	1,3,5	6	13	16	2	4	4	5	4	3,75	1,98	20	0	10
10	5	2	5	2,3	5	2	18	6	6	6	3	3	3,33	1,52	33	0	33
12	6	3	6	3	6	3	15	5	10	5	3	2	4	1.46	33	0	0
12	6	4	6	2,4	6	4	15	5	5	5	4	3	4	1,69	33	0	66
12	5	2	1	0,1,2,3,4	5	0,1,2,3,4	17	1	2	8	5	6	3,53	1,73	47	5,9	17,6

Bsp. 5: $H_1 = \{10,12,15\}$, $H_2 = \{4,5,6\}$, u = 3

h_1	h_2	a	g	D	d_{max}	D_h	t	w	$\overline{w}$	z_h	SM_1	SM_2	SM_3	SM_4	SM_5	SM_6	SM_7
12	6	3	6	3	6	3	15	5	10	5	3	2	4	1,46	33	0	0
15	5	2	5	2,3	5	2	16	4	4	8	3	3	3,75	1,34	50	0	25
10	5	2	5	2,3	5	2	18	6	6	6	3	3	3,33	1,28	33	0	33
12	4	2	4	2	4	2	20	5	10	10	2	2	3	1,03	50	0	50
15	6	1	3	1,2,4,5	6	1,4	14	2	2	6	5	5	4,28	1,98	43	0	28,6
10	6	1	2	1,3,5	6	1,3	16	2	4	4	5	4	3,75	1,98	25	0	12,5
10	4	1	2	1,3	4	1,3	21	3	6	9	3	3	2,86	1,28	43	0	14,3
15	4	2	1	0,1,2,3	4	0,1,2,3	19	1	2	12	4	5	3,16	1,30	63	5,3	15,8
12	5	2	1	0,1,2,3,4	5	0,1,2,3,4	17	1	2	8	5	6	3,53	1,74	47	5,9	17,6

Bsp. 6: $H_1 = \{15,20\}$, $H_2 = \{10,12\}$, u = 3

h_1	h_2	a	g	D	d_{max}	D_h	t	w	$\overline{w}$	z_h	SM_1	SM_2	SM_3	SM_4	SM_5	SM_6	SM_7
20	10	5	10	5	10	5	9	3	6	3	5	2	6,66	4,03	33	0	0
15	10	2	5	2,3, 7,8	10	2	10	2	2	2	8	5	6	3,20	20	0	20
20	12	2	4	2,6, 10	12	2,6	8	1	2	2	10	4	7,5	5,95	25	0	25
15	12	1	3	1,2, 4,5, 7,8, 10, 11	12	1,2	9	1	1	1	11	9	6,66	7,56	22	0	22

5. SCHLUSSFOLGERUNGEN

Die hier vorgeschlagenen Maßzahlen für die Bewertung der Synchronisation zweier ÖPNV-Linien sind sehr einfach zu berechnen und sie erlauben auch einen qualifizierten Vergleich der möglichen Lösungen untereinander. Insbesondere ist auch zu erkennen, dass die von uns vorgeschlagene Vorzugslösung bezüglich fast aller Bewertungen einen Vorteil gegenüber den Alternativen hat.

Insbesondere wird deutlich, dass teilerfremde Taktzeiten immer ungünstige Konsequenzen haben und deshalb nach Möglichkeit vermieden werden sollten.

Andere Maßzahlen für die Synchronisation sind im Prinzip denkbar, erlauben aber keine ganz so einfache Berechnung wie die von uns angegebenen.

Die Grundüberlegungen, die wir hier für zwei Linien genutzt haben, sind auch für mehr als zwei Linien anwendbar, allerdings dürfte eine Vorzugslösung nicht ganz so einfach angebbar sein.

Literatur

[1] W. Dźwigoń, L. Hempel: Optimale Gestaltung von ÖPNV-Liniennetzen unter Land-Use Aspekten. IKM 2000: International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering. Weimar, 22-24.06.2000.

[2] W. Dźwigoń, L. Hempel, M. Richter: Increase of quality of public transport service providing easy recognised time table and high probability of on time departures. Transport Systems Telematics 4th International Conference. Katowice – Ustron 4-6.11 2004.

[3] W. Mensebach: Strassenverkehrstechnik. Werner-Verlag, Düsseldorf 1994.

[4] A. Rudnicki: Jakość komunikacji miejskiej. Zeszyty Naukowo-Techniczne Oddziału SITK w Krakowie, Zeszyt 71, Kraków 1999.

This paper is involved with **CIVITAS – CARAVEL** project:
„Clean and better transport in cities"
The project has received research funding from
the **Community's Sixth Framework Programme**.
The paper reflects only the author's views and the Community is
not liable for any use that may be made of the information
contained therein.